

OMM - Dimensiona analiza

March 24, 2023

Definicija?

- DA je metoda kojom se izvode zaključci o nekoj pojavi samo na osnovu pretpostavke da se ta pojava može opisati *dimenziono korektnom jednačinom* koja povezuje neke promenljive.
- DA je alat za proveru oblika zavisnosti među fizičkim veličinama na osnovu analize njihovih *dimenzija*.
- DA je alat za razumevanje osobina fizičkih veličina koje ne zavise od *jedinica* korišćenih za njihovo merenje.
- DA je metoda za upoređivanje *dimenzija* fizičkih veličina koje se javljaju u nekom problemu da bi se otkrile zavisnosti između tih veličina bez neophodnosti da se sam problem do kraja reši.

Fizička veličina

- brzina, površina, pritisak, temperatura, ubrzanje, sila, rad,...
- Oznaka: Q_1, Q_2, \dots
- Ukazuje na fizičku prirodu veličine

Dimenzija fizičke veličine

- dužina, masa, vreme, jačina struje, temperatura, količina supstance, jačina svetlosti
- Oznaka: $\delta(Q_1), \delta(Q_2), \dots$
- Nije određeno unapred kako će da se meri

Jedinica fizičke veličine

- metar, kilogram, sekunda, amper, kelvin, mol, kandela,...
- Oznaka: $[Q_1], [Q_2], \dots$
- Služe za upoređivanje, koliko se jedna veličina iste dimenzije sadrži u drugoj

Osnovne dimenzije

- Oznaka: $\delta_1, \delta_2, \dots$
- SI sistem (International System of Units) 1960.

dimenzija	oznaka
dužina	L
masa	M
vreme	T
jačina struje	I
temperatura	Θ
količina supstance	N
jačina svetlosti	J

U okviru mehanike, svaka fizička veličina može da se izrazi preko 3 osnovne dimenzije (L, M, T)

Bezdimenzione veličine

- Skalari: π, e, \dots ($\delta(const) = 1$)

Izvedene dimenzije

$$Q = Q_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot Q_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$$

$$\delta(Q) = \delta(Q_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot Q_n^{\alpha_n}) = \delta(Q_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \delta(Q_n)^{\alpha_n}$$

$$\delta(Q) = \delta_1^{a_1} \cdot \dots \cdot \delta_k^{a_k}, \quad a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}$$

Primeri

- Q=površina: $\delta(Q) = L^2$
- Q=zapremina: $\delta(Q) = L^3$
- Q=brzina (pređeni put u jedinici vremena) : $\delta(Q) = L/T = L \cdot T^{-1}$
- Q=ubrzanje (promena brzine u jedinici vremena):
 $\delta(Q) = L/T^2 = L \cdot T^{-2}$
- Q=sila (masa puta ubrzanje): $\delta(Q) = ML/T^2 = MLT^{-2}$
- Q=rad (sila duž pređenog puta): $\delta(Q) = ML^2/T^2 = ML^2T^{-2}$
- Q=snaga (rad u jedinici vremena): $\delta(Q) = ML^2/T^3 = ML^2T^{-3}$
- ...

Da li može neki drugi sistem osnovnih dimenzija da se izabere?

Npr. osnovne: masa (M), brzina (V), vreme (T)

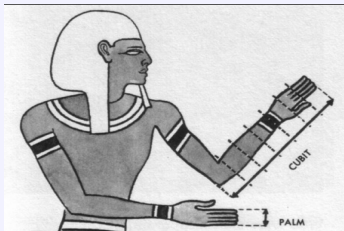
Onda izvedene:

- Q=dužina: $\delta(Q) = VT$
- Q=površina: $\delta(Q) = V^2 T^2$
- Q=zapremina: $\delta(Q) = V^3 T^3$
- Q=ubrzanje (promena brzine u jedinici vremena): $\delta(Q) = VT^{-1}$
- Q=sila (masa puta ubrzanje): $\delta(Q) = MVT^{-1}$
- Q=rad (sila duž pređenog puta): $\delta(Q) = MV^2$
- Q= snaga (rad u jedinici vremena): $\delta(Q) = MV^2 T^{-1}$
- ...

Jedinice za dužinu (istorijski osvrt)

Egipatski kraljevski kubit

- Prvi poznati zvanično usvojen etalon dužine



- Dužina je jednaka dužini podlaktice od lakta do vrha prstiju vladajućeg faraona
- Standard izrađen od crnog granita, a realizacije u obliku stapova,...
- Svakog punog meseca ti štapovi su se morali porediti sa kraljevskim kubitom.





- **Milja (mile)**
- Rimsko carstvo (cc 123g.p.n.e.)
- standardna dužina se definiše kao 1000 dvokoraka uvežbane rimske vojske

- **Jarda (yard)**
- 1120. godina (Engleska)
- standardna dužina se definiše kao rastojanje od nosa kralja Engleske Henrija I do kraja njegove ruke.



- **Stopa (foot)**
- Kraj 17. veka, Francuska
- standardna dužina se definiše se kao dužina stope kralja Luja XIV.

Vreme (istorijski osvrt)

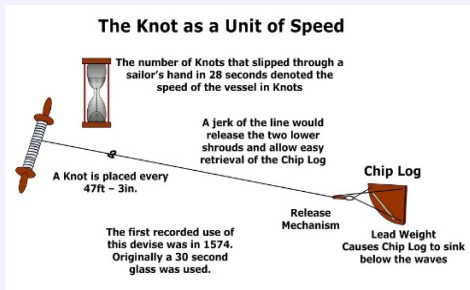
Orloj - Prag (1410)



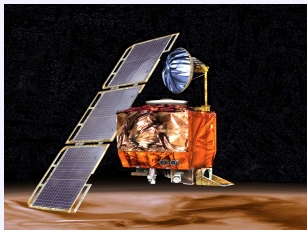
- Zemlja u sredini. Sunce i Mesec sa menama, i znaci Zodijaka.
- Spoljni prsten, arapske cifre - **staro Bohemijsko vreme (Italijansko vreme)**, dan počinje zalaskom Sunca.
- Rimske cifre, dva puta I-XII - **civilno vreme (Nemačko vreme)** uvedeno kao zvanično u Bohemiju 1547. Dan počinje i završava u ponoć.
- Arapske cifre 1-12 na plavom polju - **Vavilonsko vreme**, Sunce pokazuje na vreme. Obdanica je podeljena na 12 sati, nejednake dužine sata u toku godine (45-75min).
- Mala zvezdica (dole) - **sideričko, sunčano vreme**, Zemljina rotacija u odnosu na nepokretne zvezde, a ne u odnosu na Sunce.

Šta koristiti?

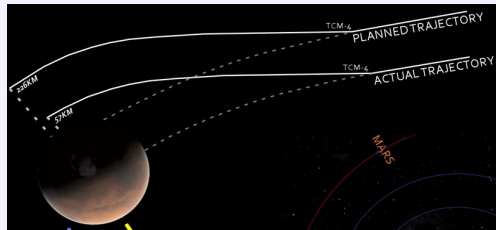
- Čvor - jedinica za brzinu
- Funta - jedinica za masu (masa mesa koja se mogla kupiti za jednu srebrnu funtu srednjem veku)
- Barel - jedinica za zapreminu tečnosti
- Jutro - jedinica za površinu (površina obradivog zemljišta koje se može preorati do podneva)
- Konjska snaga - jedinica za snagu
- Oka - jedinica za masu, ali i za zapreminu
- Palac - jedinica za dužinu
- Pinta - jedinica za zapreminu
-



MCO (Mars Climate Orbiter)



- Lansiran 11.12.1998.
- Ispitivanje klime i atmosfere Marsa.
- Nakon što se približio Marsu 23.09.1999. satelit je izgubljen.



- Softver i unutrašnjost raketnog sistema je izgradila jedna grupa inženjera (Lickheed Martin). Softver je koristio engleske jedinice (stopa-funta-sekunda).
- Softver za navođenje izgradila je druga grupa inženjera (Jet Propulsion Laboratory). Softver je koristio SI sistem jedinica (m-kg-s).

Osnovne jedinice

- Oznaka: $[\delta_1], [\delta_2], \dots$

dimenzija	oznaka	jedinica	oznaka
dužina	L	metar	m
masa	M	kilogram	kg
vreme	T	sekunda	s
jačina struje	I	amper	A
temperatura	Θ	kelvin	K
količina supstance	N	mol	mol
jačina svetlosti	J	kandela	cd

Izvedene jedinice

- $m/s, m/s^2, N = \frac{kg \cdot m}{s^2}, J = Nm, W = \frac{J}{s}, Pa = \frac{kg}{ms^2}, Hz = \frac{1}{s}, \dots$

Rezime oznaka

- Q_1, \dots, Q_n - fizičke veličine (dužina, površina, brzina, snaga,...)
- $\delta(Q)$ - dimenzija fizičke veličine
- $\delta_1, \dots, \delta_k$ - osnovne fizičke dimenzije (L, M, T, I, Θ , N, J)
- $[Q]$ - jedinica (m, m/s, J, N,)
- $[\delta_1], \dots, [\delta_k]$ - osnovne jedinice (m, kg, s, A, K, mol, cd)
- $v(Q)$ - brojna vrednost fizičke veličine

$$Q = v(Q)[Q]$$

Dimenziona homogenost

1. $Q_1 = Q_2 \Rightarrow \delta(Q_1) = \delta(Q_2)$
2. $\delta(Q_1^{a_1} Q_2^{a_2}) = \delta(Q_1)^{a_1} \delta(Q_2)^{a_2}$, $a_{1,2} \in \mathbb{Q}$
3. $Q_1 \pm Q_2$ je fizička veličina akko $\delta(Q_1) = \delta(Q_2)$.
Tada $\delta(Q_1 \pm Q_2) = \delta(Q_1) = \delta(Q_2)$.
4. $\delta(\xi) = \delta(Q^0) = \delta(Q)^0 = 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall Q$.
5. Svi argumenti u nepolinomijalnim funkcijama moraju biti bezdimenzione veličine.



$$Q = Q_1^{a_1} \cdot \dots \cdot Q_n^{a_n}, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$$

- $\delta(Q) = \delta(Q_1)^{a_1} \cdot \dots \cdot \delta(Q_n)^{a_n}$
- $[Q] = [Q_1]^{a_1} \cdot \dots \cdot [Q_n]^{a_n}$
- $v(Q) = v(Q_1)^{a_1} \cdot \dots \cdot v(Q_n)^{a_n}$

Dimenziona zavisnost/nezavisnost

Veličine Q_1, \dots, Q_n su dimenziono nezavisne akko važi:
 ako $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ i $Q = Q_1^{a_1} \cdot \dots \cdot Q_n^{a_n}$ je bezdimenziona veličina
 ($\delta(Q) = 1$) tada mora biti $a_1 = \dots = a_n = 0$.
 U suprotnom su dimenziono zavisne veličine.

Osnovne dimenzije $\delta_1, \dots, \delta_k$ su dimenziono nezavisne.

Smena jedinica (npr. $m \rightarrow km, h \rightarrow s, \dots$)

Osnovne jedinice: $[\delta_1], \dots, [\delta_k]$

Drugi sistem jedinica: $[\delta_1]_*, \dots, [\delta_k]_*$

Veza između njih: $[\delta_i] = x_i [\delta_i]_*, \quad i = 1, \dots, k, (x_i - \text{faktori konverzije})$

$$Q = v(Q)[Q] = v_*(Q)[Q]_* \quad Q = Q_1^{a_1} \cdot \dots \cdot Q_k^{a_k}, \quad a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}$$

- $v_*(Q) = x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_k^{a_k} v(Q)$
- $[Q] = [\delta_1]^{a_1} \cdot \dots \cdot [\delta_k]^{a_k}$
- $[Q]_* = [\delta_1]_*^{a_1} \cdot \dots \cdot [\delta_k]_*^{a_k}$

Dimenziona matrica

Neka su Q_1, \dots, Q_n fizičke veličine i $\delta(Q_j) = \delta_1^{m_{1j}} \cdot \dots \cdot \delta_k^{m_{kj}}$ dimenzija fizičke veličine Q_j , $j = 1, \dots, n$, izražena preko osnovnih dimenzija $\delta_1, \dots, \delta_k$, onda matricu $M = (m_{ij})_{i=1, \dots, k, j=1, \dots, n}$ dimenzije $k \times n$ nazivamo dimenzionom matricom veličina Q_1, \dots, Q_n u odnosu na dimenzije $\delta_1, \dots, \delta_k$.

$$Q = Q_1^{a_1} \cdot \dots \cdot Q_k^{a_k}, \quad a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}$$

$$\delta(Q) = \delta_1^{m_{11}a_1 + \dots + m_{1n}a_n} \cdot \dots \cdot \delta_k^{m_{k1}a_1 + \dots + m_{kn}a_n}$$

Q je bezdimenziona veličina ($\delta(Q) = 1$) \Leftrightarrow

$$\left. \begin{array}{l} m_{11}a_1 + \dots + m_{1n}a_n = 0 \\ \dots \\ m_{k1}a_1 + \dots + m_{kn}a_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow M \cdot \alpha = \mathbf{0}, \quad \alpha = (a_1, \dots, a_n)^T$$

Ako je Q bezdimenziona veličina $\Rightarrow v_*(Q) = v(Q)$ tj. brojna vrednost veličine se neće promeniti promenom osnovnih jedinica.

Fizički smisljena jednačina

Jednačina $f(Q_1, \dots, Q_n) = 0$ ima fizičkog smisla ako važi sledeće:

- $f(Q_1, \dots, Q_n)$ je takođe fizička veličina, tj.

$$\delta(f(Q_1, \dots, Q_n)) = \delta_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot \delta_k^{\beta_k}, \quad \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{Q}$$

$$[f(Q_1, \dots, Q_n)] = [\delta_1]^{\beta_1} \cdot \dots \cdot [\delta_k]^{\beta_k}$$

$$v(f(Q_1, \dots, Q_n)) = f(v(Q_1), \dots, v(Q_n))$$

- homogenost

$$f(x_1^{m_{11}} \cdot \dots \cdot x_k^{m_{k1}} \rho_1, \dots, x_1^{m_{1n}} \cdot \dots \cdot x_k^{m_{kn}} \rho_n) = x_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\beta_k} \cdot f(\rho_1, \dots, \rho_n)$$

- $[f(Q_1, \dots, Q_n)] = [Q_1]^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot [Q_n]^{\gamma_n}$

Fizički smisljena jednačina je invarijantna u odnosu na promenu osnovnih jedinica (fizički zakon ne zavisi od jedinica), tj. ako $f(v(Q_1), \dots, v(Q_n)) = 0 \Rightarrow f(v_(Q_1), \dots, v_*(Q_n)) = 0$.*

SLOBODAN PAD: $v = \sqrt{2gh}$

Fizičke veličine:

- m - masa tela
- h - visina
- v - brzina
- g - ubrzanje Zemljine teže

Dimenzije fizičkih veličina:

- $\delta(m) = M$
- $\delta(h) = L$
- $\delta(v) = L/T$
- $\delta(g) = L/T^2$

Dimenziona analiza:

$$f(m, h, v, g) = 0 \Rightarrow \delta\left(\frac{v^2}{gh}\right) = 1 \Rightarrow v = C_1 \sqrt{gh}$$

ROTACIJA SISTEMA 2 TELA: $T_R = \sqrt{\frac{r^3}{Gm_2}} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{m_1}{m_2} + 1}}$

Fizičke veličine:

- T_r - period rotacije sistema 2 tela koja se vrte jedan oko drugog po kružnim putanjama
- m_1 - masa prvog tela
- m_2 - masa drugog tela
- r - rastojanje dva tela

Dimenzije fizičkih veličina:

- $\delta(T_R) = T$
- $\delta(m_1) = \delta(m_2) = M$
- $\delta(r) = L$

Dimenziona analiza:

$$f(T_R, m_1, m_2, r) = 0 \Rightarrow ???$$

ROTACIJA SISTEMA 2 TELA: $T_R = \sqrt{\frac{r^3}{Gm_2}} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{m_1}{m_2} + 1}}$

Fizičke veličine:

- T_R - period rotacije sistema 2 tela koja se vrte jedan oko drugog po kružnim putanjama
- m_1 - masa prvog tela
- m_2 - masa drugog tela
- r - rastojanje dva tela
- G - Njutnova gravitaciona konstanta

Dimenzije fizičkih veličina:

- $\delta(T_R) = T$
- $\delta(m_1) = \delta(m_2) = M$
- $\delta(r) = L$
- $\delta(G) = \frac{L^3}{MT^2} = L^3 M^{-1} T^{-2}$

Dimenziona analiza:

$$f(T_R, m_1, m_2, r, G) = 0 \Rightarrow \delta\left(\frac{T_R \sqrt{Gm_2}}{\sqrt{r^3}}\right) = 1 \Rightarrow T_R = \sqrt{\frac{r^3}{Gm_2}} \cdot f_6\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$$